Ricorsione e induzione

Lezione 19 di Programmazione 2

Docente: Giuseppe Scollo

Università di Catania, sede di Comiso (RG)
Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Studi in Informatica applicata, AA 2007-8

Indice

definizioni ricorsive

una definizione, in un linguaggio, ha due costituenti:

definiendum: il termine da definire

definiens: l'espressione o frase che lo definisce

una definizione è **ricorsiva** quando il definiendum occorre nel definiens

per l'inerente circolarità, una definizione ricorsiva rischia di essere semanticamente viziosa: inutilizzabile al fine di stabilire il significato dei suoi costituenti; tuttavia ...

... si può impedire la formazione di circoli viziosi se il definiendum è un termine parametrico, con un parametro che assume valori in un insieme **"ben ordinato"**

N.B. il significato esatto di questa qualificazione è specificato più avanti

in tal caso, possiamo rendere **costruttiva**, anziché viziosa, la circolarità in una definizione ricorsiva assicurando che le occorrenze del definiendum nel definiens siano riferite a valori del parametro più piccoli di quello a cui è riferito il definiendum in quanto tale

una definizione ricorsiva siffatta è, a tutti gli effetti, una **definizione induttiva**

induzione naturale

il principio di induzione naturale, dovuto a **Giuseppe Peano** (1889), ha due distinte, sebbene correlate, manifestazioni:

nella **definizione** dei numeri naturali, come principio di **minimalità costruttiva**, evidente nella **terza clausola** appresso:

0 è un numero naturale

se **n** è un numero naturale, **n+1** è un nuovo numero naturale

non esistono altri numeri naturali

nelle **dimostrazioni** di proprietà sui numeri naturali:

se vale **P(0)**

e se vale l'implicazione **P(n) → P(n+1)**

allora **P(n)** vale per tutti i numeri naturali **n**

la minimalità costruttiva dei numeri naturali giustifica l'uso del principio di induzione naturale come regola di inferenza logica

definizione induttiva di termini

esempi di costruzioni induttive di largo impiego nella definizione di linguaggi formali, quali ad es. linguaggi logici, linguaggi di programmazione, etc., si hanno nelle definizioni degli **insiemi dei termini**, **formule** o **espressioni** del linguaggio

tali **universi sintattici** hanno definizione induttiva in tutti i casi d'interesse pratico

ecco, ad esempio, la definizione induttiva dell'insieme dei termini generato da una **segnatura algebrica**, ovvero famiglia di **operatori**, cioè **simboli di operazione**, dove ogni operatore ha una **arietà**: il numero di argomenti dell'operazione che esso designa

quando l'arietà è 0, l'operatore è un **simbolo di costante**

per una data interpretazione degli operatori quali operazioni di un'algebra (di quelli di arietà 0 quali costanti dell'algebra), un tale termine, essendo privo di variabili, è la descrizione di un calcolo di un valore nell'algebra, a partire da valori costanti

l'insieme dei termini di complessità 0 è costituito dai simboli di costante

se ω è un operatore di arietà $k>0$, e $t_1, \ldots, t_k$ sono termini di complessità minore o uguale a $\mathbf{n} \geq 0$, dei quali almeno uno di complessità **n**, allora $\omega(t_1, \ldots, t_k)$ è un nuovo termine di complessità **n+1**

ogni termine ha una complessità, definita induttivamente dalle clausole precedenti

induzione strutturale

la costruzione induttiva dei termini ben si presta ad introdurre una tecnica di definizione e di dimostrazione molto utile nei linguaggi di programmazione: l'**induzione strutturale**

supponiamo di voler definire una nuova funzione, o dimostrare che una certa proprietà valga, per tutti i possibili valori assunti da una struttura dati:

per applicare l'induzione strutturale occorre che ogni valore sia rappresentabile da (almeno) un termine privo di variabili

ad esempio, per le pile di interi, ogni pila o è vuota (una costante del tipo di dati in questione) o è rappresentabile da un termine push(n, p), dove n è una costante intera e p è un termine rappresentante una pila allo stesso modo

in tali condizioni, l'induzione strutturale consiste nel

definire o dimostrare per le strutture più piccole, tipicamente **costanti** del tipo di dati

definire o dimostrare per le strutture generate dalle operazioni $C(t_1,\ldots,t_k)$, di costruzione del tipo di dati, **assumendo** di aver già definito o dimostrato per $t_1,\ldots,t_k$ **(ipotesi di induzione)**

il principio di induzione strutturale può essere facilmente dedotto dal principio di induzione naturale di Peano, giacché altro non è che induzione naturale sulla complessità dei termini che rappresentano i valori delle strutture dati in gioco

il seguente principio di induzione, al contrario, è una **generalizzazione propria** del principio di Peano

induzione noetheriana

una relazione binaria su un insieme è un **ordinamento stretto** se è **irriflessiva** (cioè non vale mai per una coppia di elementi identici) e **transitiva**

se < designa un ordinamento stretto, > designa la sua relazione conversa, anch'essa un ordinamento stretto

un ordinamento stretto < su un insieme S è detto **ben fondato**, o che S è **ben ordinato** da <, se non esistono catene discendenti infinite $a_0 > a_1 > \dots a_n > \dots$, cioè ogni catena discendente termina

tecniche di dimostrazione della terminazione di programmi si basano sulla possibilità di poter ben ordinare l'insieme delle sue possibili computazioni

una proprietà P definita per gli elementi di S, strettamente ordinato da <, è detta **ereditaria** se vale l'implicazione

$(\forall y<x\ P(y)) \rightarrow P(x)$

il seguente principio di induzione è dovuto a Emmy Noether:

in un insieme ben ordinato, ogni proprietà ereditaria vale in tutto l'insieme

l'ordinamento dei naturali è ben fondato, dal che discende una forma equivalente dell'induzione di Peano (la cui base deriva dalla validità vacua dell'implicazione di ereditarietà sui naturali quando x=0)

non si può invece ricondurre l'induzione noetheriana a quella naturale: l'ordinamento dei naturali è totale, l'induzione noetheriana si applica alla più ampia classe degli ordinamenti parziali (ben fondati)

esercizi

1. definire ricorsivamente il prodotto di due numeri naturali, usando la somma

   suggerimento: definire per induzione su uno dei due argomenti del prodotto

2. dimostrare per induzione la validità della formula di Gauss per il calcolo della somma dei primi n numeri naturali positivi: $n(n+1)/2$
3. dimostrare per induzione che la somma dei primi n numeri naturali dispari è n^2
4. definire ricorsivamente la funzione $lgf(n) = lg(n!)$
5. definire ricorsivamente la funzione $lgm_k(n) = (lg\ n) \bmod k$, dove $k>1$ è un parametro costante
6. dimostrare per induzione che un insieme di n elementi ha 2^n sottoinsiemi
7. dimostrare per induzione che esistono m^n funzioni totali da un insieme di n elementi in uno di m elementi

   (considerare anche i casi m=0 e n=0)