Approssimazione asintotica di funzioni

nell'analisi degli algoritmi

Lezione 4 di Programmazione 2

Docente: Giuseppe Scollo

Università di Catania, sede di Comiso (RG)
Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Studi in Informatica applicata, AA 2006-7

Indice

funzioni e costanti speciali

cosa hanno di speciale? sono di **uso frequente** nell'analisi degli algoritmi ...
... ed efficientemente **approssimabili**
eccone un quadro sintetico di valori tipici e approssimazioni (giustificate appresso)

costanti speciali : $e \approx 2.71828$, $\gamma \approx 0.57721$, $\phi = (1+\sqrt{5})/2 \approx 1.61803$

$\ln 2 \approx 0.693147$, $\lg e = 1/\ln 2 \approx 1.44269$

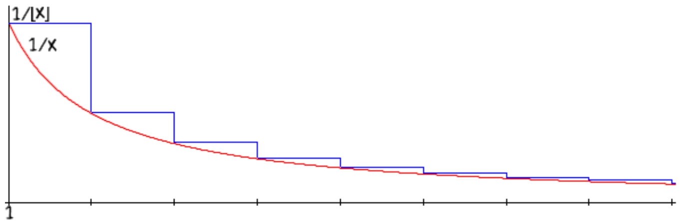
funzione	nome	valore tipico	approssimazione
$\lfloor x \rfloor$	base (floor)	$\lfloor 3.14 \rfloor = 3$	x
$\lceil x \rceil$	tetto (ceiling)	$\lceil 3.14 \rceil = 4$	x
$\lg N$	logaritmo binario	$\lg 1024 = 10$	$1.44 \ln N$
H_N	numeri armonici	$H_{10} \approx 2.9$	$\ln N + \gamma$
F_N	numeri di Fibonacci	$F_{10} = 55$	$\phi^N/\sqrt{5}$
$N!$	fattoriale	$10! = 3628800$	$(N/e)^N$
$\lg(N!)$		$\lg(100!) \approx 520$	$N \lg N - 1.44N$

logaritmo naturale e serie armonica

numeri armonici : approssimazione discreta dell'area sottesa dalla curva $y = 1/x$

$$H_N = 1 + 1/2 + 1/3 + \ldots + 1/N$$

la **costante di Eulero** γ misura l'area della differenza tra la funzione a gradino $y = 1/\lfloor x \rfloor$ e la funzione $y = 1/x$, per $x \geq 1$, v. figura:



tale significato di γ si coglie dall'approssimazione

$$H_N \approx \ln N + \gamma + 1/(12N)$$

poiché $\ln N = \int_1^N dx/x$

tale approssimazione permette un calcolo più efficiente di H_N, usando la funzione di libreria `log`, rispetto al calcolo diretto dalla definizione

serie di Fibonacci e sezione aurea

numeri di Fibonacci : soluzione del noto problema dei conigli ...

definiti induttivamente: $F_N = F_{N-1} + F_{N-2}$, per $N \geq 2$, con $F_0 = 0$ e $F_1 = 1$

l'apparentemente lenta velocità di crescita iniziale ...

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...

... non deve trarre in inganno:

il rapporto F_{N+1}/F_N fra due numeri di Fibonacci consecutivi, al crescere di N, tende al classico **rapporto aureo** $\phi = (1+\sqrt{5})/2 \approx 1.61803$

detto anche **sezione aurea :** sezione di un segmento in due parti tali che la minore stia alla maggiore come quest'ultima sta alla somma delle due

tale proporzione è frequente nell'arte ellenica (Fidia), e si riscontra anche nel corpo umano

poiché il rapporto F_{N+1}/F_N tende a un valore costante > 1, la successione di Fibonacci acquista velocità di crescita **esponenziale!**

ciò è confermato dall'**approssimazione asintotica :** $F_N \approx \phi^N/\sqrt{5}$

funzione fattoriale e formula di Stirling

definizione induttiva: $N! = (N-1)!\,N$, per $N > 0$, con $0! = 1$

- la velocità di crescita di $N!$ è superiore a quella di k^N per qualsiasi k
- $N!$ è il numero dei possibili ordinamenti di un insieme di N oggetti
- la **formula di Stirling** permette una rapida approssimazione asintotica del logaritmo binario del fattoriale:

$$\lg N! \approx N \lg N - N \lg e + \lg\sqrt{2\pi N}$$

- dove il terzo addendo è asintoticamente trascurabile, il che giustifica l'approssimazione precedentemente proposta:

$$\lg N! \approx N \lg N - 1.44\,N$$

stima asintotica e notazione O grande

che vuol dire **esattamente** che una funzione è un'**approssimazione asintotica** di un'altra?

la notazione O grande designa una **limitazione asintotica** della velocità di crescita:

def. : $g(N)$ è $O(f(N))$ se esistono costanti c e N_0 tali che $g(N) < cf(N)$ per ogni $N > N_0$

utilità della notazione O grande:

- approssimazione in espressioni matematiche
  - ignorare i termini più piccoli
- approssimazione nella stima di prestazioni di algoritmi e programmi
  - ignorare le parti meno significative
- classificazione degli algoritmi
  - in termini di limiti superiori al tempo di calcolo

discendono direttamente dalla definizione molte proprietà della notazione O grande che permettono spesso di manipolarne le espressioni "come se la O non ci fosse", ad esempio:

$O(k) = O(1)$ e $kO(f(N)) = O(kf(N)) = O(f(N))$, per ogni costante k,

$O(f(N)) + O(g(N)) = O(f(N)+g(N))$, $O(f(N))O(g(N)) = O(f(N)g(N))$

approssimazione funzionale

la limitazione asintotica espressa dalla notazione O grande non è sufficiente a **caratterizzare** la velocità di crescita

ad esempio: kN è $O(N^2)$ ma ha crescita lineare, non quadratica

la notazione $\approx$ (letta "**all'incirca**") designa l'**approssimazione asintotica** di una funzione con un'altra:

def. : $f(N) \approx g(N)$ se $f(N) = g(N)+h(N)$ e $h(N)/g(N) \to 0$ per $N \to \infty$

per caratterizzare **solo la velocità di crescita** l'approssimazione asintotica chiede troppo... basta invece il seguente concetto

la notazione $\propto$ (letta "**proporzionale a**") designa la **proporzionalità asintotica** di una funzione ad un'altra:

def. : $f(N) \propto g(N)$ se esiste una costante c tale che $f(N) \approx cg(N)$